

# تعريف دالة عددية

نص من إعداد : خالد بن خنشة

(1) نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$ .

(1) أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0.1 < \alpha < 0.2$  .

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$  .

(II)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R} - \{2\}$  ، كما يلي :  $f(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$  .

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم للتعلم والتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(1) أ. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

ب. احسب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

(2) لـ عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  بحيث يكون : من أجل كل  $x \neq 2$  ،  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$  .

ب. استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته .

ج. ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  .

(3) أ. بين أنه من أجل كل  $x \neq 2$  فإن :  $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-2)^3}$  .

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على مجالي مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن :  $f(\alpha) = -2 + \frac{9}{(\alpha-2)^2}$  ، ثم أعط حصر العدد  $f(\alpha)$  .

(5) اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 3 .

(6) أنشئ كلا من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$  . (نأخذ  $f(\alpha) \approx 0.7$ ) .

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عند إشارة حلول المعادلة :  $f(x) = -m$  .

(8) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = f(-|x|)$  ، و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

لـ ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $h$  عند 0 .

ب. بين أن الدالة زوجية ، ثم أنشئ المنحنى  $(C_h)$  اعتمادا على المنحنى  $(C_f)$  .

من خلال جدول التغيرات نجد أن  
 الدالة  $g$  مستمرة ومنتجة على  $\mathbb{R}$   
 وبالأخص  $[0,1]$ .

$$g(0,1) = -0,25 \quad \text{و لدينا} \\
g(0,1) = +0,163$$

$$g(0,1) = g(0,1) < 0 \quad \text{ومن هنا}$$

فحسب مبرهنة القيمة المتوسطة فإن  
 المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً، وبما  $0,2 < 0,3$   
 حيث  $[g(x)] = 0$

ب. الاستنتاج إشارة  $g(x)$   
 من خلال جدول التغيرات نجد أن

$x$	$-\infty$	$x$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$$f(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2} \quad (II)$$

$$D = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

① أ. أكتب  $f(x)$  نسلاً و  $f(x)$  نسلاً  
 $x \rightarrow -\infty$   $x \rightarrow +\infty$

$$+ \text{نسلاً } f(x) = \text{نسلاً } \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$$

$$= \text{نسلاً } \frac{-x^3}{x^2} = \text{نسلاً } -x = -\infty$$

$$\text{نسلاً } f(x) = \text{نسلاً } -x = +\infty$$

(I) نغير الدالة العددية  $g$  المعرفة

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2 \quad (1)$$

أ. أكتب  $g(x)$  نسلاً و  $g(x)$  نسلاً  
 $x \rightarrow -\infty$   $x \rightarrow +\infty$

$$g(x) = \text{نسلاً } x^3 - 6x^2 + 12x - 2$$

$$= \text{نسلاً } x^3 = -\infty$$

$$g(x) = \text{نسلاً } x^3 = +\infty$$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$   
 ثم استنتاج

جدول المتغير

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4)$$

$$g'(x) = 3(x-2)^2$$

بدراسة إشارة  $g'(x)$

$$3(x-2)^2 \geq 0 \quad \text{دائمًا} \quad g'(x) > 0$$

ومن هنا

نستنتج أن الدالة  $g$  متزايدة تامة على  $\mathbb{R}$

ج. جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$x$	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	متزايدة	$+\infty$

② أ. اثبات أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل  
 حلاً واحدًا  $x$  حيث  $0,2 < x < 0,3$

<<صفحة 1>>

ب. استخرج  $a$  و  $C$  (يُقبل مستقلاً مقارباً)  
 ملاحظ  $(\Delta)$  والمجالين  $0 < x < 2$  و  $x > 2$   
 لدينا  $f(x) = -x + \frac{3}{(x-2)^2}$

لأن  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = 0$

ومن هنا، نستنتج  $(\Delta)$  أو المعادلة  $y = -x$   
 هو تقارب مائل لـ  $(C_f)$   
 ج. دراسة الوضعية النسبية لـ  $(C_f)$   
 بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

ندرس إشارة الفرق  $f(x) - y$ .

لدينا  $f(x) - y = -x + \frac{3}{(x-2)^2} - (-x)$

$f(x) - y = \frac{3}{(x-2)^2}$

عامة  $3 > 0$  و  $(x-2)^2 > 0$  أي

$f(x) - y > 0$

ومن هنا نعلم  $C_f$  يقع فوقه  $(\Delta)$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$\frac{3}{(x-2)^2}$		+
$f(x) - y$		+
الوضع النسبي	$C_f$ يقع فوقه $(\Delta)$	

ج. حساب  $f(x)$  ثم تغيير المتغير  $m \rightarrow 2$   
 $f(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$   
 $= \frac{-2^3 + 4 \times 2^2 - 4 \times 2 + 3}{(2-2)^2} = \frac{+3}{0^+} = +\infty$

$f(x) = \frac{+3}{0^+} = +\infty$

أ. نقيضه الأعداد الحقيقية  $a, b, c$   
 بحيث يكون  $m \neq 2$

$f(x) = ax + b + \frac{C}{(x-2)^2}$

لدينا  $f(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$  ①

$f(x) = \frac{(ax+b)(x-2)^2 + C}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2 - 4x + 4) + C}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{ax^3 - 4ax^2 + 4ax - bx^2 + 4bx + 4b + C}{(x-2)^2}$

$f(x) = \frac{ax^3 + (-4a-b)x^2 + (4a+4b)x + 4b+C}{(x-2)^2}$

بالمقارنة بين ① و ② نجد:  
 $\left. \begin{aligned} a &= -1 \\ -4a - b &= 4 \\ 4a + b + C &= 3 \end{aligned} \right\}$   
 $b = 4a - 4 = 0$  ومنه  $C = 3$

$f(x) = -x + \frac{3}{(x-2)^2}$

3) أ. أشتات انه  $f(x) = -2 + \frac{9}{(x-1)^2}$  (4)  
 ثم اشتات فورا  $f(x)$  انه

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2} \rightarrow (4)$$

ولنا  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$

ومنه  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$

حسب البرهان، القيم المتوسطة  $g(x) = 0$

ومنه  $x^3 - 6x^2 + 12x - 2 = 0$

ومنه  $x^3 = 6x^2 - 12x + 2$

النتيجة في المعادلة (4)

$$f(x) = \frac{-(6x^2 - 12x + 2) + 4x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 + 12x - 2 + 4x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x + 1}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 8 + 9}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{-2(x^2 - 4x + 2) + 9}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{-2(x-2)^2 + 9}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{-2(x-2)^2}{(x-1)^2} + \frac{9}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = -2 + \frac{9}{(x-1)^2}$$

3) أ. أشتات انه  $f(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)^3}$

$$f(x) = \frac{-(5x^4 + 8x - 4)(x-1)^3 - 2(x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x + 3)}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{(x-1)[(-3x^4 + 8x - 4)(x-2) - 2(x^3 + 4x^2 - 4x + 3)]}{(x-1)^6}$$

$$= \frac{-3x^5 + 6x^4 - 16x^3 + 4x^2 + 8x - 6}{(x-1)^5}$$

$$= \frac{-x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 2}{(x-1)^5}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 2)}{(x-1)^6} = \frac{-g(x)}{(x-1)^6}$$

ب. دراسة اتجاه تغير الحالة  $f$   
 إشارة المشتقة

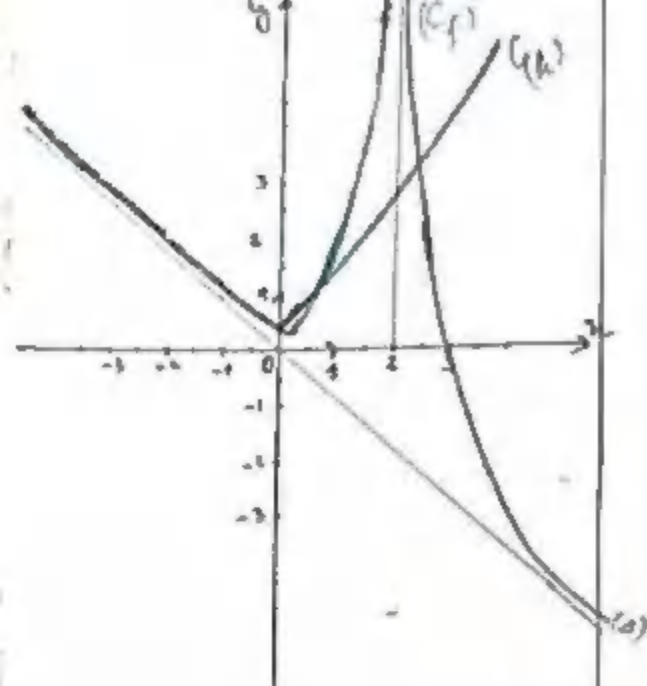
إننا  $x=2$  منه  $x-2=0$

x	$-\infty$	x	2	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+
$-g(x)$	+	0	-	-
$x-2$	-	-	0	+
$(x-1)^3$	-	-	+	+
$f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)^6}$	-	0	+	-
$f(x)$	متناقصة	متزايدة	متناقصة	متزايدة

جدول التغيرات

x	$-\infty$	x	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

«الصفحة 3»



نناقش في أول الأمر حلول المعادلة  
 $f(m) = m$ .

⑤  $f(x) \in ]-\infty, m]$  يوجد حل، يوجد حل موجب

⑥  $m = f(x)$  يوجد حل موجب موجب  
 ألد هما متطابق، متطابق

⑦  $m \in ]f(x), +\infty[$  يوجد 3 حلول (موجبة وسالبة)

ندخل الآن إشارة (-) على

⑧  $f(x) \in ]-\infty, -m]$  يوجد 3 حلول موجب وسالبة

⑨  $m = -f(x)$  يوجد حل موجب موجب

ألد هما متطابق

⑩  $m \in ]-m, +\infty[$  يوجد حل موجب موجب

لدينا  $f(x)$

$0.1 < x < 0.2$

$-1.9 < x-2 < -4.8$

$3.24 < (x-2)^2 < 3.61$

$\frac{1}{3.61} < \frac{1}{(x-2)^2} < \frac{1}{3.24}$

$0.277 < \frac{1}{(x-2)^2} < 0.308$

$2.493 < -2 + \frac{9}{(x-2)^2} < 2.77$

$0.493 < -2 + \frac{9}{(x-2)^2} < 0.77$

$0.493 < f(x) < 0.77$

⑤ كتابة المعادلات T للمعادلة f

لدينا، لنقله  $x_0 = 3$

$y_T = f'(3)(x-3) + f(3)$

$f'(3) = \frac{-8(3)}{(3-2)^3} = -8$  حيث

$f(3) = 0$

$y_T = -8(x-3) = -8x + 24$  ومنه

$y_T = -8x + 24$  معادلة المعادلات

⑥ اشتق كلا من (f) و (A)

⑦ ملاحظة: بيانته عدد وإشارة

حلول المعادلات  $f(m) = -m$

لدينا  $f(x)$  مناسبت أفقيته



ب. اثبات أنه الدالة  $f$  زوجية غير  
 انشاء، لكننا  $C_f$  المتناظر على  $C_f$ .

لدينا  

$$f(-x) = f(-|x|)$$

بما أن  

$$|-x| = |x|$$

فإن  

$$f(-x) = f(-|x|) = f(x)$$

ومنه فإن، له الدالة  $f$  زوجية.  
 بيانها يقبل محور الترتيب كحور تماثل.

على المجال  $]-\infty, 0]$

$C_f$  ينطبق على  $C_f$  لأنه  $f(x) = f(x)$

على المجال  $]0, +\infty[$

نلاحظ أن  $f$  زوجية، نرسم المنحني بالنسبة  
 إلى محور الترتيب كما هو موضح  
 في الشكل السابق.

3) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$   
 بـ  $f(x) = f(-|x|)$ .

أ. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  
 في  $x=0$ .

لدينا  

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

ومن ثم:

$$f(x) = \begin{cases} f(-(-x)) & x < 0 \\ f[-(x)] & x > 0 \end{cases}$$

ومن ثم  

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x < 0 \\ f(-x) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(-x^3 + 4x^2 - 4x + 1) - 3}{4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^3 + 16x^2 - 16x + 1 - 3}{4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x^3 + 16x^2 - 16x + 0}{4x} = \frac{0}{0} = -\infty$$

نتيجة أنه، له الدالة  $f$  غير قابلة  
 للاشتقاق عند  $0$ .